

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅
管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
园龄：4年7个月
粉丝：288
关注：5
+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

积分 - 457097
排名 - 1198

单变量微积分笔记28——不定式和洛必达法则

我们已经能够处理很多极限，但是对于一些特殊情况的极限问题，过去的方法显得有些苍白。在先前内容的铺垫下，我们终于可以处理一些不定型的极限问题了，其中包括“0/0”型、“∞/∞”型，这一切都是通过“洛必达法则”实现的。从此，我们甚至能够判断“∞的大小”。

不定式

把某些型如0/0或∞/∞的极限成为型不定式。其它常见的不定式还有0⁰、0·∞、∞⁰、1[∞]、∞-∞

例如 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ 是一个0⁰型不定式，底数和指数是两股相反的力量，底数想让表达式极限趋近于0，指数想让表达式趋近于1，二者互相较劲，看谁的力量更胜一筹。

洛必达法则

0/0型的极限

先来看一个例子：

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1} = ?$$

这无法用直接代入的方法求解了，是一个典型的0/0型极限。可以试着用长除法解决：

$$\begin{array}{r} x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1 \\ x^2 - 1 \overline{) x^{10} - 1} \\ \underline{x^{10} - x^8} \\ -1 + x^8 \\ \underline{x^8 - x^6} \\ -1 + x^6 \\ \underline{x^6 - x^4} \\ -1 + x^4 \\ \underline{x^4 - x^2} \\ -1 + x^2 \\ \underline{x^2 - 1} \\ 0 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 5$$

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

虽然能够求得极限，但计算过程太过繁琐，下面尝试使用更简单的办法。

先将极限做一次变形：

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{10} - 1)/(x - 1)}{(x^2 - 1)/(x - 1)}$$

如果令 $f(x) = x^{10} - 1$, $f(1) = 0$, 那么

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1), \quad f'(x) = 10x^9$$

这正是导数的定义。

同理，令 $g(x) = x^2 - 1$, $g'(x) = 2x$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{10} - 1)/(x - 1)}{(x^2 - 1)/(x - 1)} = \frac{10x^9}{2x} \Big|_{x=1} = 5$$

公式

把上面的方法更系统化，就离洛必达法则更进一步了。

如果 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 是 $0/0$ 的极限，那么有 $f(a) = g(a) = 0$ ，该极限的求解过程如下：

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)/(x-a)}{g(x)/(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - 0)/(x-a)}{(g(x) - 0)/(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a))/(x-a)}{(g(x) - g(a))/(x-a)} \\ &= \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (g'(x) \neq 0) \end{aligned}$$

这就是洛必达法则：

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

上式成立的前提是： $f(a) = g(a) = 0$ ；等号右侧的极限存在。第二点有点微妙——右端的存在证明了左端的存在。

示例1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} &=? \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 5x)'}{(\sin 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cos 5x}{2 \cos 2x} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

示例2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = ?$$

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x}$$

这一步仍未解决问题，还是0/0型，于是再次使用洛必达法则：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$$

与线性逼近的比较

如果用线性逼近（线性逼近可参考[数学笔记6——线性近似和二阶近似](#)）计算上节的示例，则在 $x \rightarrow 0$ 时：

$$f(x) \approx f'(0)(x) + f(0)$$

$$\sin u \approx (\sin' 0)u + \sin 0 = u$$

$$\frac{\sin 5x}{\sin 2x} \approx \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

利用二阶近似，在 $x \rightarrow 0$ 时：

$$f(x) \approx f'(0)(x) + f(0) + f''(0)x^2/2$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} \approx \frac{1 - x^2/2 - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

结果与使用洛必达法则计算的相等。

洛必达法则的推广

前面提到洛必达法则的基本定理：

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

上式成立的前提是： $f(a) = g(a) = 0$ ；等号右侧的极限存在。第二点有点微妙——右端的存在证明了左端的存在。

定理的推广

(1) 该定理所有条件中，对 $a = \pm\infty$ 的情况，结论依然成立。

(2) 该定理第一条件中，对 $f(a)$ 和 $g(a)$ ，极限皆为 $\pm\infty$ 的情况，结论依然成立。

简单地说，洛必达法则仅对0/0和 ∞/∞ 直接适用，其它构型需要经过一定的演算和变形，使其变为0/0或 ∞/∞ 。

示例1

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$0 \cdot (-\infty)$ 型像是两个式子在比赛，看谁的变化速度更快，但这不能直接使用洛必达法则，所以原式需要经过演化：

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$$

这次变成了 $(-\infty/\infty)$ ，即 ∞/∞ 型，可以直接使用洛必达法则：

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

当 $x \rightarrow 0^+$ 时， x 的变化速度要快于 $\ln x$ 。

示例2

$$p > 0, \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-px} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-px} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{px}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{p e^{px}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时， x 比 e^{px} 变化的缓慢。

示例3

$$p > 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{px}}{x^{100}} = ?$$

一个典型的 ∞/∞ 型，但是在使用洛必达法则时会遇到麻烦：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{px}}{x^{100}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p x e^{px}}{100 x^{99}}$$

这并没有实质性的进展。当然，我们可以推算出，在经过连续使用洛必达法则后，分子依然趋近 ∞ ，分母最终将变成一个常数，所以最终结果是 ∞ 。

这个结果并不直观，我们尝试使用更直观的方式得出结论，这需要一点代数技巧。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{px}}{x^{100}} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{px/100}}{x} \right)^{100} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{p}{100} e^{px/100}}{1} \right)^{100} = \infty$$

由此可以得出这样的结论：指数函数的变化率胜过任何幂函数。

示例4

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^{1/3}} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^{1/3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{x^{-2/3}/3} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x^{-1/3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

结论：对数函数比任何幂函数都变化的更慢。

示例5

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = ?$$

这是 0^0 型，不能直接使用洛必达法则，所以仍需进行演化，这里的演化方式是使用 e 作为底数：

$$x^x = e^{x \ln x}$$

在示例1中得知，

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$$

注意事项

陷阱

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = ?$$

$0/0$ 型可以直接使用洛必达法则，求导也很简单，因此很高兴的计算如下：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2} = 0$$

根据线性逼近重新计算一下：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} \approx \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \infty$$

得到了两个截然相反的结果，一定是其中某个环节出现了问题。在第一个计算中：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2}$$

左边的式子是 $1/0$ 型，不能使用洛必达法则！所以这个等式是错的。实际上可以直接得到左侧等于 ∞ 的结论。

不要忘记基础知识

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^4 + 1}{x^4 + 2} = ?$$

∞/∞ 是符合洛必达法则的，但在这个例子中没有必要去使用洛必达法则。分子的最高次项是 x^5 ，分母是 x^4 ，所以分子是分母的高阶无穷，因此可以直接得出结论，结果是 ∞ 。

这个例子给我们的提示就是：不要忘记基础知识。

洛必达表法则不适用的情况

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos x}{x} = ?$$

∞/∞ 型，使用洛必达法则：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \sin x}{1} = ?$$

看起来更复杂了。 $\cos x$ 的取值范围是 $[-1, 1]$ ，所以当 $x \rightarrow \infty$ 时可以直接求得极限：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos x}{x} = 1$$

不要忘记基础知识。

综合示例

示例1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = ?$$

0/0型,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cos 5x}{1} = 5$$

示例2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 6x + 2}{x + 1} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 6x + 2}{x + 1} = \frac{0^2 - 6 \times 0 + 2}{0 + 1} = 2$$

示例3

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - 1}{x^b - 1} = ?$$

0/0型,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - 1}{x^b - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^{a-1}}{bx^{b-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a1^{a-1}}{b1^{b-1}} = \frac{a}{b}$$

示例4

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{3x})}{2x + 5} = ?$$

∞/∞ 型,

$$\frac{d(2x + 5)}{dx} = 2$$

$$u = 1 + e^{3x}, \quad \frac{d \ln(1 + e^{3x})}{dx} = \frac{d \ln u}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot 3e^{3x} = \frac{3e^{3x}}{1 + e^{3x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3e^{3x}}{1 + e^{3x}} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{3x})}{2x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3e^{3x}/(1 + e^{3x})}{2} = \frac{3}{2}$$

出处：微信公众号“我是8位的”

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”



随笔

分类: [单变量微积分](#)

标签: [洛必达法则](#), [不定式](#)

好文要顶

关注我

收藏该文



我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

1

推荐

0

反对

« 上一篇: [单变量微积分笔记27——极坐标下的面积](#)

» 下一篇: [单变量微积分笔记29——反常积分和瑕积分](#)

posted on 2017-12-07 17:20 我是8位的 阅读(6015) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

cloud.e-iceblue.cn

JAVA Office
文档在线编辑
APIs

打开 >

编辑推荐:

- 革命性创新, 动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月8日~3月18日

最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
- 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房

- 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能, 可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人: 本金63万, 月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:

博客园

Copyright © 2022 我是8位的

Powered by .NET 6 on Kubernetes